page 236 1/3 -1992.
T. P. E

MINISTÈRE DE L'EQUIPEMENT, DU LOGEMENT,
DES TRANSPORTS ET DE L'ESPACE

Concours Commun 1992
ENTPE, ENSG, ENTM, ENSTIMD

2

COMPOSITION COMMUNE DE MATHEMATIQUES

Temps accordé : 4 heures

On désigne par $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes à une indéterminée et à coefficients réels et par $E_N = \mathbb{R}_N[X]$ le sous-espace de E constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à N. On pourra identifier E à l'ensemble des applications polynomiales de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}_+$ étant l'ensemble des réels positifs ou nul). Le problème propose d'étudier quelques propriétés des polynômes de Laguerre.

Les deux parties en sont indépendantes

Première partie

1. Soit F l'ensemble des applications f de classe C^∞ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, telles que: $\int_0^{+\infty} [f(t)]^2 \cdot e^{-t} \cdot dt$ converge.

   a. Justifier que pour f et g dans F, $\int_0^{+\infty} f(t) \cdot g(t) \cdot e^{-t} dt$ existe.

   b. En déduire que F est un espace vectoriel réel.

   c. Justifier que l'application $\langle\ ,\ \rangle$ définie sur F^2 par:

$$\forall (f,g) \in F^2 \quad \langle f,g \rangle = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot g(t) \cdot e^{-t} dt$$

   est un produit scalaire sur F.

   d. Préciser pourquoi F contient les applications polynomiales de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}$, permettant ainsi de munir E d'un produit scalaire, par restriction de $\langle\ ,\ \rangle$ à E^2.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $h_n : x \longmapsto x^n \cdot e^{-x}$, et $L_n : x \longmapsto \frac{e^x}{n!} \cdot h_n^{(n)}(x)$ c'est-à-dire:

$$Ln(x) = \frac{e^x}{n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} \left(x^n \cdot e^{-x}\right)$$

   a. Justifier que L_n est dans E, avec L_n de degré n. Préciser le coefficient de X^n dans L_n.

   b. Soit g dans E; exprimer $\langle g, L_n \rangle$ en fonction de $\int_0^{+\infty} g^{(n)}(t) \cdot t^n \cdot e^{-t} \cdot dt$

   c. En déduire que $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthogonale de $(E, \langle\ ,\ \rangle)$, et que, par suite, pour tout entier N, la famille $(L_n)_{n \in \{0,1,\ldots,N\}}$ est une base orthogonale de $(E_N, \langle\ ,\ \rangle)$.

   d. Préciser la valeur de $\int_0^{\infty} t^n \cdot e^{-t} \cdot dt$ pour $n \in \mathbb{N}$.

   e. Préciser $\langle L_n, L_n \rangle$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Quelle conclusion peut-on en tirer?

3. D'après 1.c., si on pose pour g dans F: $\|g\| = \sqrt{\langle g, g\rangle}$, on peut dire que $(F, \|\ \|)$ est un espace vectoriel réel normé.

a. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $U_n : g \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} g(t) \cdot t^n \cdot e^{-t} \cdot dt$. L'application U_n est visiblement linéaire sur F. Démontrer que pour g dans F, $|U_n(g)| \leqslant \|g\| \sqrt{(2n)!}$ et en déduire la valeur de $\lambda = \sup\limits_{g \neq 0} \dfrac{|U_n(g)|}{\|g\|}$.

b. Pour tout g dans F et n dans $\mathbb{N}$, on note $\widehat{g}(n)$ le produit scalaire $\langle g, L_n\rangle$. Soit N dans $\mathbb{N}$ et p_N: projection orthogonale, au sens du produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$, sur le sous-espace E_N de F. Démontrer que, pour g dans F, $p_N(g) = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \widehat{g}(n) L_n$, puis que $\|p_N(g)\|^2 \leqslant \|g\|^2$. En déduire la convergence de la série: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} [\widehat{g}(n)]^2$.

4. Pour a dans $\mathbb{R}_+$, on note $\phi_a : x \longmapsto e^{-ax}$, application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.

a. Justifier que $\phi_a \in F$ et calculer $\langle \phi_a, L_n\rangle$ pour n dans $\mathbb{N}$.

b. Justifier: $\lim\limits_{n \to +\infty} \left\| \phi_a - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (\langle \phi_a, L_k\rangle \cdot L_k) \right\| = 0$.

Deuxième partie

Soit α un nombre réel strictement positif fixé. Pour tout réel λ, on désigne par $\mathcal{D}_\lambda$ l'équation différentielle sur $I = \mathbb{R}_+^*$ (ensemble des réels strictement positifs):

$$\mathcal{D}_\lambda : \qquad x \cdot y'' + (\alpha - x) \cdot y' + \lambda \cdot y = 0$$

1.a. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe un unique réel λ_n tel que $\mathcal{D}_{\lambda_n}$ admette une solution polynomiale P_n, de degré n, et dont le coefficient dominant soit égal à $\dfrac{(-1)^n}{n!}$.

b. Calculer, pour $n \geqslant 2$, les coefficients de X^{n-1} et de X^{n-2} dans P_n. On vérifiera que, pour $n \geqslant 2$,

$$P_n = \frac{(-1)^n}{n!} X^n + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}(\alpha + n - 1) X^{n-1} + \frac{(-1)^{n-2}}{2 \cdot (n-2)!}(\alpha + n - 1)(\alpha + n - 2) X^{n-2} + \cdots$$

c. Expliciter P_0, P_1, P_2.

2. On considère $f_\alpha : x \longmapsto x^{\alpha - 1} \cdot e^{-x}$. Soit g une application de classe C^2, de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.
Soit $h : x \longmapsto x \cdot f_\alpha(x) \cdot g'(x)$ (ou encore $h(x) = f_{\alpha+1}(x) \cdot g'(x)$, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$). Montrer que pour tout λ de $\mathbb{R}$, g est solution de $\mathcal{D}_\lambda$ si et seulement si Δ_λ est réalisée, avec:

$$\Delta_\lambda : \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad h'(x) + \lambda \cdot f_\alpha(x) \cdot g(x) = 0$$

3. Vérifier que $\Phi_\alpha : (P, Q) \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} P(x) \cdot Q(x) \cdot f_\alpha(x) \cdot dx$ définit un produit scalaire sur E. (On démontrera d'abord la convergence de l'intégrale.)

4.a. Pour $(P, Q, R) \in E^3$ comparer $\Phi_\alpha(PR, Q)$ et $\Phi_\alpha(P, RQ)$.

b. En utilisant Δ_λ, montrer que pour tous n et m dans $\mathbb{N}$, on a: $\lambda_n \cdot \Phi_\alpha(P_n, P_m) = \Phi_{\alpha+1}(P_m', P_n')$. (Pour λ_n, la définition a été donnée au **1.a.**)

c. En déduire que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthogonale de (E, Φ_α) et que pour tout entier naturel N, la famille $(P_n)_{n \in \{0,1,\ldots,N\}}$ est une base orthogonale de $(\mathbb{R}_N[X], \Phi_\alpha)$.

5.a. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une famille de coefficients réels: $(C_{n,k})_{0 \leqslant k \leqslant n+1}$, telle que:
$X \cdot P_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} C_{n,k} \cdot P_k(X)$.

b. Justifier que pour $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$, et $k \in \mathbb{N}, k \leqslant n - 2$, on a: $C_{n,k} = 0$.

c. En utilisant les résultats du 1., calculer $C_{n,k}$ pour $k \in \{n-1, n, n+1\}$. Vérifier que $\dfrac{C_{n+1,n}}{C_{n,n+1}} = \dfrac{n+\alpha}{n+1}$

6.a. Prouver que pour tout n de $\mathbb{N}$: $C_{n,n+1}\Phi_\alpha(P_{n+1}, P_{n+1}) = C_{n+1,n}\Phi_\alpha(P_n, P_n)$

b. Dans cette question seulement, on supposera que α est un entier naturel non nul. Calculer alors $\Phi_\alpha(P_n, P_n)$ pour n dans $\mathbb{N}$.

7. Pour n dans $\mathbb{N}$, on définit Q_n sur $\mathbb{R}_+^*$ par:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad Q_n(x) = e^x \cdot x^{1-\alpha} \cdot f_{\alpha+n}^{(n)}(x) = e^x \cdot x^{1-\alpha} \cdot \frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n+\alpha-1} \cdot e^{-x}\right)$$

a. Vérifier que Q_n est polynomiale, avec le degré de Q_n égal à n.

b. Justifier que pour tous n, p dans $\mathbb{N}$, avec $n > p$, on a: $\Phi_\alpha(P_p, Q_n) = 0$.

c. En déduire une relation entre Q_n et P_n.

8. Justifier que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, P_n possède n racines réelles, distinctes dans $\mathbb{R}_+^*$.
Indication: Si k est le nombre de racines réelles, dans $\mathbb{R}_+^*$, et d'ordre impair, de P_n, on posera $Q = 1$ si $k = 0$, et $Q = \prod_{i=1}^{k}(X - a_i)$ si $k \geqslant 1$ (avec a_i: racine d'ordre impair, dans $\mathbb{R}_+^*$, de P_n, et on utilisera $\Phi_\alpha(P_n, Q)$).

9. Pour x fixé dans $\mathbb{R}$, calculer $G_x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x) \cdot t^n$ pour $t \in]-1, 1[$. *Indication:* On admettra qu'il s'agit d'une série entière (en t) de rayon de convergence supérieur ou égal à 1; on calculera $G'_x(t)$ ainsi que $x \cdot G_x(t)$ et on utilisera les résultats du 5.